Signaux | Chapitre 2 | TD (S2)

Exercice n°1 • Représentation complexe *cours*

On considère les signaux suivants :

$$s_1(t) = \cos(\omega t) \qquad s_2(t) = \sin(\omega t) \qquad s_3(t) = 2\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

On note :

$$s_{12}(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

1) Représenter dans le plan complexe les amplitudes complexe $\underline{A_1}$, $\underline{A_2}$ et $\underline{A_3}$ associées aux signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$ et $s_3(t)$.

2) Déterminer graphiquement quels signaux sont en quadrature de phase.

3) Construire graphiquement l'amplitude complexe $\underline{A_{12}}$ associée au signal $s_{12}(t)$.

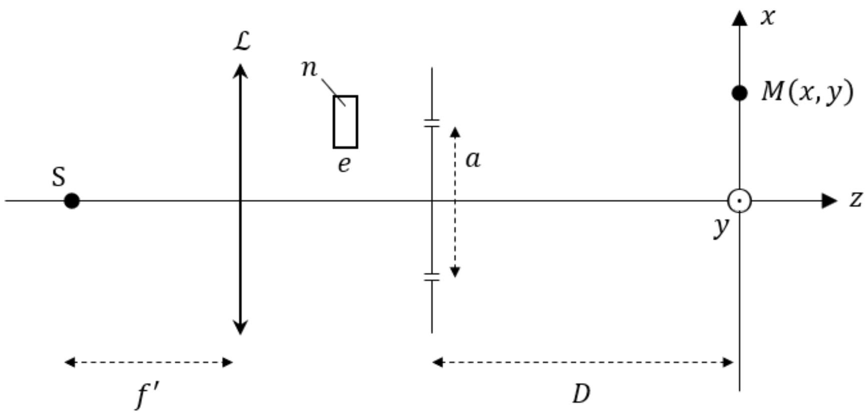
4) Déterminer graphiquement l'amplitude et la phase de $s_{12}(t)$. Le vérifier par le calcul.

5) La superposition des signaux $s_{12}(t)$ et $s_3(t)$ conduit-elle a des interférences constructives ou destructives ?

Exercice n°2 • Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre *cours*

On considère le dispositif suivant. Une lame de verre à faces parallèles d'indice optique $n = 1,500$ et d'épaisseur e est insérée devant l'un des trous d'Young. Sur un écran placé loin du dispositif, on observe des franges rectilignes.

Données : $\lambda = 500$ nm, $a = 2,00$ mm et $D = 3$ m.



1) Tracer les deux rayons issus de S et arrivant au point $M(x, y)$.

2) Déterminer la différence de marche entre ces deux rayons.

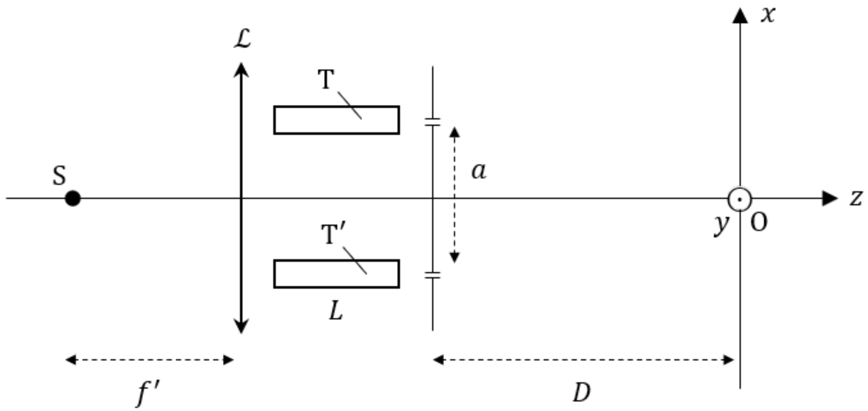
3) Lorsque l'on enlève la lame, la figure d'interférence se décale de 7 interfranges. Préciser si le décalage est vers le haut ou vers le bas. En déduire l'épaisseur de la lame de verre.

Exercice n°3 • Mesure de l'indice optique de l'air ★⯪☆

L'interféromètre de Rayleigh est un dérivé du dispositif d'Young. Il possède deux tubes T et T' de même longueur $L = 20$ cm. Une source S monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 577$ nm est placée en amont du dispositif.

Initialement, les tubes sont remplis d'air. Le montage est alors symétrique et l'on observe une frange brillante au centre O de l'écran. On fait ensuite progressivement le vide dans le tube T.

Attention, dans tout l'exercice, on note $n \neq 1$ l'indice optique de l'air. L'objectif de l'expérience est de déterminer n.

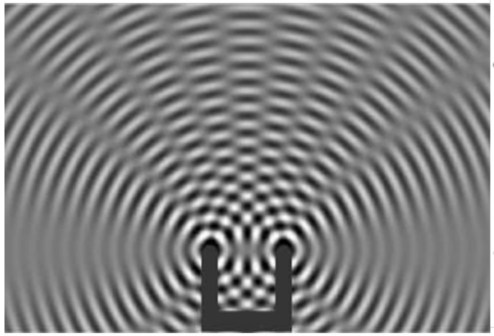
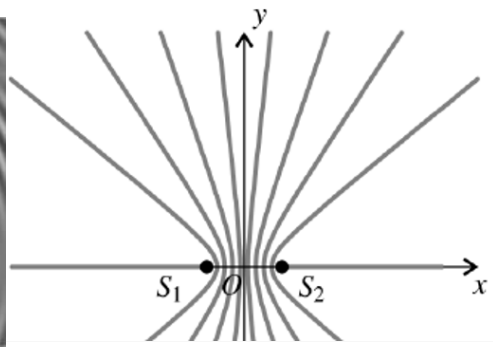


1) On observe que les franges se déplace sur l'écran. Dans quel sens se déplacent-elles ?

2) Sur la durée totale de l'expérience, 101 franges brillantes ont défilé au niveau du point O et, à la fin, on observe une frange sombre en O. En déduire l'indice optique de l'air.

Exercice n°4 • Interférences dans une cuve à ondes ★★☆

Dans une cuve à onde, deux pointes distantes de a frappent en même temps et à intervalles réguliers la surface de l'eau, générant deux ondes qui interfèrent. La figure de droite est une représentation schématique du dispositif de gauche.

Sur la figure de gauche, le blanc représente là où la surface de l'eau est convexe (sommet des vagues) et noire là où elle est concave (creux des vagues). L'amplitude d'oscillation est plus faible là où la figure est moins contrastée. On suppose pour simplifier que des ondes sinusoïdales partent des points S_1 et S_2 où les pointes frappent la surface.

1) Expliquer pourquoi l'image est bien contrastée au voisinage de l'axe (Oy).

2) En notant λ la longueur d'onde, donner la condition pour que l'interférence en un point M, situé aux distance d_1 et d_2 respectivement de S_1 et S_2, soit destructive. Cette condition fait intervenir un entier p.

Pour chaque entier p, le lieu des points vérifiant cette condition est une courbe que l'on appelle dans la suite ligne de vibration minimale. Les lignes de vibration minimale sont représentées sur la figure de droite : ce sont des hyperboles.

3) Les parties $x < -a/2$ et $x > a/2$ de l'axe (Ox) sont des lignes de vibration minimale. En déduire un renseignement sur la rapport a/λ.

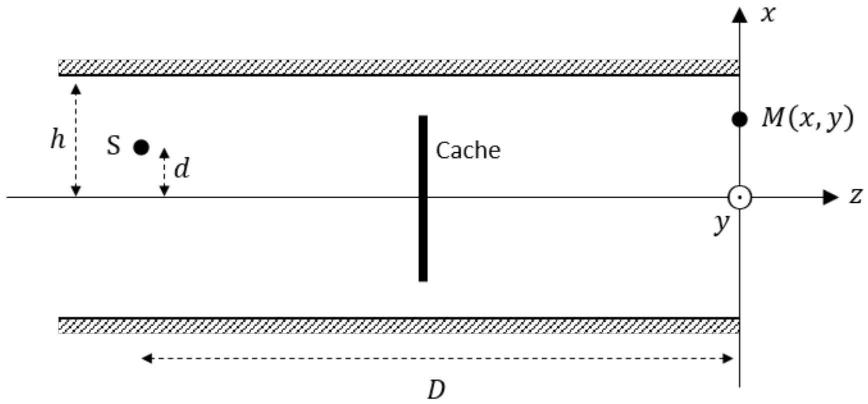
4) En comptant le nombre de lignes de vibration minimale entre S_1 et S_2, déterminer la valeur de a/λ.

Exercice n°5 • Miroirs parallèles ★★⯪

Une source S monochromatique de longueur d'onde λ éclaire deux miroirs plan parallèles entre eux et distants de $2h$. La source n'est pas sur l'axe de symétrie des miroirs.

Un cache est placé entre la source et l'écran, uniquement dans le but d'empêcher la source d'éclairer directement l'écran, mais il ne bloque pas les réflexions. L'écran est placé à une distance D de la source.

Données : $\lambda = 700$ nm, $h = 2,0$ mm, $d = 0,80$ mm, $D = 1,0$ m.



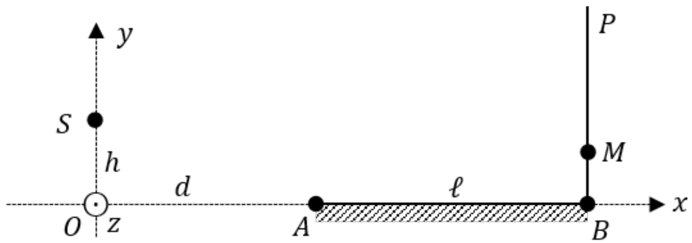
1) Montrer que le dispositif est équivalent à celui des fentes d'Young. Déterminer l'emplacement des sources secondaires S_1 et S_2.

2) Déterminer la différence de marche $\delta(M)$.

3) Où se trouve l'interférence d'ordre 0 et que vaut l'interfrange ?

Exercice n°6 • Miroir de Lloyd ★★⯪

Le dispositif interférentiel, représenté sur la figure ci-dessous est appelé miroir de Lloyd. Une source ponctuelle S, située à une distance $OS = h$ du plan d'un miroir plan de longueur $AB = \ell$, émet dans toutes les directions une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0.



La distance $OA = d$ est telle que $h \ll d$.

On place un repère (x, y, z) centré sur O. On donne les coordonnées des différents points :

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} d+\ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} d+\ell \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On observe sur l'écran P une figure d'interférences à deux ondes : l'une provenant directement (sans réflexion) de S et l'autre issue de S et réfléchie par le miroir.

Données : $\ell = 24$ cm, $\lambda_0 = 600$ nm, $d = 1,0$ cm. L'indice optique de l'air est pris égal à 1.

1) Donner les coordonnées de S', image de S à travers le miroir.

2) Reproduire la figure et construire soigneusement le champ d'interférences, c'est-à-dire la zone de l'espace où se superposent le faisceau directement émis par S et le faisceau réfléchi sur le miroir.

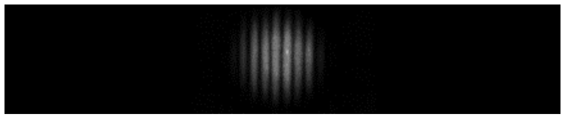
3) Construire les deux rayons issus de S qui interfèrent au point M du plan P.

4) Déterminer l'expression de la différence de marche $\delta(y, z)$ entre le rayon réfléchi et le rayon direct en tout point de l'écran, en fonction des caractéristiques géométriques et optiques du système. A-t-on une interférence constructive ou destructive au niveau du point B ?

5) Rappeler la formule de Fresnel pour deux ondes de même amplitude. En déduire l'intensité lumineuse (ou éclairement) E(y, z) en tout point de l'écran.

6) Déterminer l'expression de l'interfrange i.

L'interfrange étant trop faible, on réalise avec un dispositif approprié, une image agrandie cinq fois du champ d'interférence. On obtient la figure suivante (après agrandissement) :



7) Reproduire qualitativement la figure ci-dessus et indiquer la direction des axes (By) et (Bz).

8) Mesurer l'interfrange i à l'aide d'une règle graduée et estimer l'incertitude-type $u(i)$ sur votre mesure. Bien expliquer la démarche.

9) L'interfrange mesuré par un capteur CCD vaut $i_0 = 1,497$ mm et $u(i_0) = 0,013$ mm. Cette mesure est-elle compatible avec la vôtre ?

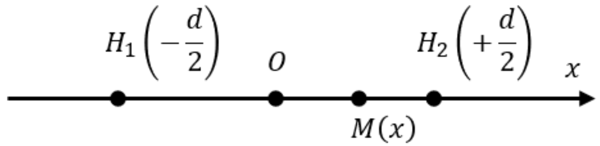
10) Exprimer puis calculer la distance h à l'aide de la valeur de i_0 indiquée à la question précédente.

En réalité, la figure d'interférence observée expérimentalement est la même que celle prédit à la question 4, mais décalé d'une demi interfrange. Pour expliquer cela, on admet qu'une réflexion sur un miroir s'accompagne toujours d'un déphasage de ϕ.

11) A-t-on, dans ce cas, une interférence constructive ou destructive au niveau du point B ? Que vaut ϕ, le déphasage engendré par un miroir ?

Exercice n°7 • Deux hauts-parleurs ★★★

On dispose deux hauts-parleurs H_1 et H_2 face à face sur un axe (Ox), espacés d'une distance $d = H_1H_2$ variable. Les deux hauts-parleurs émettent des ondes sonores sinusoïdales (dans toutes les directions, mais on ne s'intéresse qu'à l'axe des x) de même fréquence $f = 2$ kHz, de même amplitude notée A_0 et en phase. La vitesse des ondes sonores est $c = 330$ m·s^{-1}.



On note O le milieu du segment $[H_1H_2]$ et on place un microphone M d'abscisse notée x sur la droite joignant les deux hauts-parleurs.

1) Établir l'expression de l'onde reçue par le microphone en fonction de sa position x dans les trois zones :

- $x < -d/2$
- $x > d/2$
- $-d/2 < x < d/2$

Si l'onde est une onde progressive, déterminer son amplitude $A(x)$.

2) On choisit $d = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}$ et λ la longueur d'onde. Déterminer puis tracer dans ce cas l'allure du signal $s_{tot}(x, t)$ pour tout x et pour différentes valeurs de t. Préciser les régions de l'espaces où l'on trouve des interférences constructives et destructives.

3) Même question avec $d = \left(p + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$.

4) On reprend $d = p\lambda$ et on suppose que les haut-parleurs ne sont plus en phase.

Quel doit être l'avance de phase de l'onde de H_2 par rapport à celle de H_1 pour que l'amplitude du signal soit nulle pour $x > d/2$.

Éléments de correction

❶ 2) s_1 et s_2 quadrature de phase. 4) Amplitude $\sqrt{2}$ et phase $-\pi/4$. 5) Interférences destructives. ❷ 1) $\delta = \dfrac{ax}{D} - (n-1)\, e$. 2) $i = \dfrac{\lambda D}{a}$. 3) Vers le bas. $e = \dfrac{7\lambda}{n-1} = 7$ µm. ❸ 1) Bas. 2) $n = 1 + 101,5 \cdot \dfrac{\lambda_0}{L} = 1,00029$. ❹ 1) $\delta = 0$. 2) $\delta = d_1 - d_2 = \lambda\left(p + \dfrac{1}{2}\right)$. 3) $a = \lambda\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$. 4) $\dfrac{a}{\lambda} = \dfrac{9}{2}$. ❺ 1) S_1 et S_2 images de S à travers les miroirs. 2) $\delta = \dfrac{4h}{D}(x+d)$. 3) $x_0 = -d$ et $i = \dfrac{\lambda D}{4h}$. ❻ 1) $S' = (0, -h, 0)$. 2) & 3) cf. correction. 4) $\delta = \dfrac{2yh}{d+\ell}$. 5) E$(y,z) = 2E_0 \left(1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right)$. 6) $i = \lambda_0 \cdot \dfrac{d+\ell}{2h}$. 7) Franges parallèles à z. 8) Incertitude type B. 9) Écart normalisé. 10) $h = \dfrac{5\lambda_0}{i_0} \cdot \dfrac{d+\ell}{2} = 0,25$ mm. 11) Interférences destructives, $\phi = \pi$. ❼ 1) $s_{tot}(x < -d/2, t) = 2A_0 \cos\left(\dfrac{kd}{2}\right) \cos(\omega t + kx)$ OP-, $s_{tot}(x > d/2, t) = 2A_0 \cos\left(\dfrac{kd}{2}\right) \cos(\omega t - kx)$ OP+ et $s_{tot}(-d/2 < x < -d/2, t) = -2A_0 \cos(\omega t) \cos(kx)$ OS (onde stationnaire). 2) $s_{tot}(x < -d/2, t) = (-1)^p \cdot 2A_0 \cos(\omega t + kx)$, $s_{tot}(x > d/2, t) = (-1)^p \cdot 2A_0 \cos(\omega t - kx)$ et $s_{tot}(-d/2 < x < -d/2, t) = -2A_0 \cos(\omega t) \cos(kx)$. 3) $s_{tot}(x < -d/2, t) = s_{tot}(x > d/2, t) = 0$ et $s_{tot}(-d/2 < x < -d/2, t) = -2A_0 \sin(\omega t) \cos(kx)$. 4) $\phi = \pi$.